« Le triangulaire d'un carré » : une note inédite attribuée à Sophie Germain (BnF, NAF 4073)

Michel Hua
Chercheur indépendant

Novembre 2026

Résumé

Le volume NAF 4073 de la Bibliothèque nationale de France réunit des lettres adressées à Sophie Germain ou écrites par elle. Au verso du feuillet 32, couverture d'une lettre non signée du 13 mars 1814, une note énonce : « le triangulaire d'un quarré est la somme des quarrés des deux Triangulaires consécutifs », soit $T_{n-1}^2 + T_n^2 = T_{n^2}$ pour les nombres triangulaires $T_k = k(k+1)/2$. C'est la seule ligne de mathématiques du volume, et aucun catalogue ni aucune étude consultée ne la mentionne. La note est de la main de Germain : un manuscrit qui lui est attribué, daté « vers 1797 » et reproduit par Alexanderson [1], contient la même identité dans la même notation, et l'écrit en symboles comme la note la dit en mots. L'identité était connue, la note ne l'était pas. Une dernière section rattache au calcul de Germain des résultats classiques sur les sommes de puissances, dus à Faulhaber, Tits et Edwards. Tous les énoncés sont démontrés en Lean 4.

hexagon:2611.01055v2

Les manuscrits de Sophie Germain conservés à la Bibliothèque nationale de France ont surtout été étudiés pour sa théorie des nombres [13]. Le volume NAF 4073 est d'une autre nature : c'est un recueil de lettres. Sa transcription, vue par vue, n'y a trouvé qu'une ligne de mathématiques, écrite au dos d'une enveloppe de 1814.

La section 1 décrit le feuillet. La section 2 explique l'identité et la démontre en suivant le calcul de Germain. La section 3 établit la main et la date à l'aide d'un autre manuscrit, publié par Alexanderson. La section 4 rattache à ce calcul des résultats connus sur les sommes de puissances.

1 Le feuillet

NAF 4073 vient des papiers de Guillaume Libri, et les catalogues n'y voient que des lettres : « Lettres adressées à Sophie Germain ou écrites par elle » pour Delisle [5, p. 183] ; « Lettres de Delambre, Joseph Fourier, Sophie Germain, Lagrange, Lalande et G. Libri » pour la notice actuelle de la BnF. Le volume est numérisé dans Gallica [9].

Le feuillet 32 enveloppait une lettre non signée du 13 mars 1814, que Charles Henry a publiée en entier [11, n° XVII, p. 637–638]. Le verso (vue 42 de Gallica) porte l'adresse, « Mademoiselle Germain, rue Sainte-Croix-de-la-Bretonnerie », à Paris, dont le numéro a été recouvert après coup par deux larges boucles d'encre, et un cachet postal. En haut du feuillet, tête-bêche par rapport à l'adresse, une autre main a écrit une note (figure 1). La voici telle que la transcrit l'édition, avec son apparat ; les crochets marquent la restitution, les appels renvoient aux notes de l'éditeur.

NAF 4073, f. 32v (vue 42)

$$\left(\frac{(n^2-n)}{2}\right)^2+\left(\frac{(n^2+n)}{2}\right)^2=\frac{n^4+n^2}{2}$$

$1+64 \quad 189$ [a]

le triangulaire d'un quarré est la somme des quarrés des deux Triangulaires consécu[tifs] [b, c]

[a] Les nombres sont écrits sur une seule ligne ; un trait horizontal continu part du signe plus et traverse 64 jusqu'au premier chiffre de 189, qu'une première lecture avait pris pour un second signe plus suivi de 49. Relu 189 sur l'agrandissement de la vue par un humain (Michel Hua), le 25 novembre 2026. Le trait peut être une rature. Rien ne rattache explicitement cette ligne à l'égalité qui la précède.

[b] Le dernier mot est coupé par la reliure au bord du feuillet : les lettres « consécu » sont entières, la suite est prise dans le fond du cahier.

[c] Cette note est écrite à l'encre, tête-bêche par rapport à l'adresse, en haut du feuillet ; la main n'est pas celle de la lettre. Elle est plus rapide et plus anguleuse, et rappelle celle de la lettre du 18 avril 1831 aux vues 27 à 29, sans que quinze mots suffisent à l'établir : la présente lecture ne tranche pas.

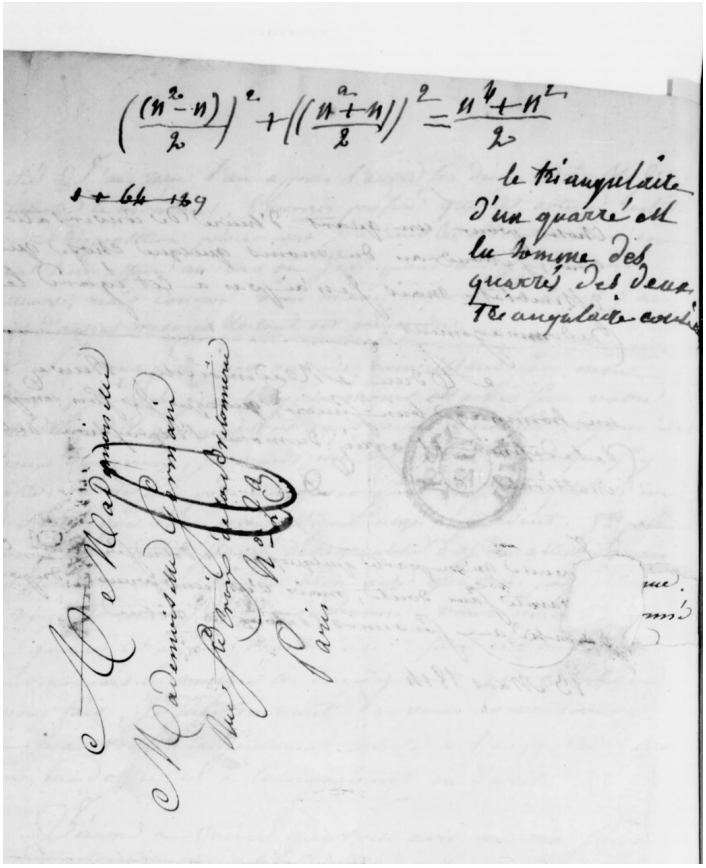

Figure 1 – BnF, NAF 4073, f. 32v (vue 42), partie haute : la formule, la ligne 1+64 189 et, à droite, la phrase ; en bas à gauche, l'adresse. Source : gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France, `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b10089787b/f42.item`. Reproduction exclue de la licence de l'article.

En graphie moderne : « le triangulaire d'un carré est la somme des carrés des deux triangulaires consécutifs ». Sur le feuillet, la formule est en haut et la phrase plus bas à droite, en cinq lignes courtes ; la ligne de nombres est à gauche, sous la formule. La note c

est celle de la transcription, écrite avant le rapprochement avec le manuscrit publié par Alexanderson ; la section 3 dit pourquoi l'attribution peut aujourd'hui aller plus loin.

Henry ne dit pas un mot de cette note, alors qu'il imprime la lettre qu'elle recouvre. Elle ne figure ni dans les catalogues [5, 17], ni dans l'étude des lettres de Germain conservées à Florence [2], ni dans les travaux sur ses manuscrits de théorie des nombres [3, 13]. Del Centina et Fiocca, qui retracent le sort de sa correspondance, ne citent NAF 4073 que pour les lettres qu'Henry a éditées, et leur inventaire recense la lettre du 13 mars 1814 sans dire un mot de sa couverture [4].

2 L'identité

Notons $T_k = 1 + 2 + \cdots + k = k(k+1)/2$ le k-ième nombre triangulaire, la somme des entiers de 1 à k, ainsi nommé parce que T_k points se rangent en triangle de côté k : $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10\ldots$ [16, A000217] « Le triangulaire d'un carré » est T_{n^2}, le triangulaire d'indice n^2 ; « le carré d'un triangulaire » est T_k^2, c'est-à-dire $(T_k)^2$, à ne pas confondre avec T_{k^2}.

La formule $1 + 2 + \cdots + k = k(k+1)/2$ est celle de l'anecdote de Gauss écolier : prié de faire la somme des entiers de 1 à 100, il l'aurait donnée sur-le-champ, 5050, en associant les termes deux à deux, $1+100 = 2+99 = \cdots = 101$, cinquante fois. En général, écrire la somme à l'endroit et à l'envers donne k paires valant chacune $k+1$, d'où $2T_k = k(k+1)$. L'histoire a enflé avec les récits ; le plus ancien, celui de Sartorius von Waltershausen en 1856, ne donne ni la suite ni le nombre 100 [10]. La formule, elle, est bien plus vieille que Gauss.

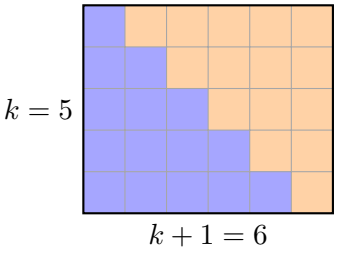

FIGURE 2 – $2T_k = k(k+1)$: deux escaliers de $T_5 = 15$ cases, l'un retourné, remplissent un rectangle 5×6. Chaque ligne compte $k+1$ cases, comme chaque paire $1 + 100$, $2 + 99\ldots$ de Gauss vaut 101.

Sur le feuillet, les deux nombres élevés au carré, $(n^2 - n)/2$ et $(n^2 + n)/2$, sont T_{n-1} et T_n, et le second membre, $(n^4 + n^2)/2 = n^2(n^2+1)/2$, est T_{n^2}. La note dit donc

$$T_{n-1}^2 + T_n^2 = T_{n^2}. \tag{1}$$

Pour $n = 2$, $1^2 + 3^2 = 10 = T_4$; pour $n = 3$, $3^2 + 6^2 = 45 = T_9$; pour $n = 4$, $6^2 + 10^2 = 136 = T_{16}$. La suite $1, 10, 45, 136, 325, \ldots$ des T_{n^2} est la suite A037270 de l'OEIS, où l'identité figure parmi les formules depuis 2013, sans référence historique [16, A037270]. La phrase française dit cela, et un peu plus : « les deux Triangulaires consécutifs » ne sont pas n'importe quels triangulaires qui se suivent, ce sont les deux dont le carré n^2 est la somme, puisque $T_{n-1} + T_n = n^2$.

Proposition 1. *Pour tout entier $n \geq 1$, $T_{n-1}^2 + T_n^2 = T_{n^2}$.*

Démonstration. La preuve suit le calcul du manuscrit reproduit par Alexanderson (figure 4). On développe les deux carrés :

$$\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}, \qquad \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2 = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4}.$$

Dans la somme, les termes $\pm 2n^3$ se détruisent :

$$T_n^2 + T_{n-1}^2 = \frac{2n^4 + 2n^2}{4} = \frac{n^4 + n^2}{2} = \frac{n^2(n^2+1)}{2} = T_{n^2}.$$

□

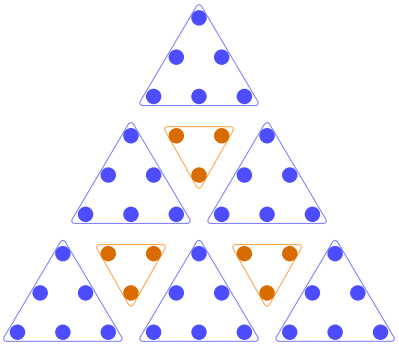

FIGURE 3 – L'identité (1) pour $n = 3$: le triangle de côté $n^2 = 9$ ($T_9 = 45$ points) se découpe en $T_3 = 6$ triangles de côté 3 (en bleu, $6 \times 6 = 36$ points) et $T_2 = 3$ triangles renversés de côté 2 (en orange, $3 \times 3 = 9$ points) : $T_9 = T_3^2 + T_2^2$. Le même découpage d'un triangle de côté mn en triangles de côté n et $n-1$ donne $T_{mn} = T_m T_n + T_{m-1} T_{n-1}$ (proposition 3). Nelsen donne une preuve sans mots du même genre pour le cas $m = 2$, $3T_n + T_{n-1} = T_{2n}$ [15, p. 104].

Le même développement donne les deux résultats du manuscrit. Dans la différence, ce sont les termes n^4 et n^2 qui se détruisent, et il reste $T_n^2 - T_{n-1}^2 = 4n^3/4 = n^3$, d'où la proposition de Lagrange en ajoutant ces égalités de 1 à n ; dans la somme, ce sont les cubes qui s'en vont, et il reste T_{n^2}. On peut aussi raisonner sans développer : avec $a = T_{n-1}$ et $b = T_n$, on a $a + b = n^2$ et $b - a = n$, donc $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}((a+b)^2 + (b-a)^2) = \frac{1}{2}(n^4 + n^2)$. La phrase du feuillet suit plutôt cet ordre-là : un carré, puis les deux triangulaires dont il est la somme et dont sa racine est la différence. Rien de tout cela ne dépasse ce qu'on savait faire en 1797.

Remarque (La ligne $1 + 64 \quad 189$). Elle n'instancie pas l'identité : $1 + 64 = 65$, et 189 n'est ni triangulaire ni carré. Pourtant $1 = 1^3$, $64 = 4^3$, et

$$189 = 4^3 + 5^3 = T_{25} - T_{16} = T_{5^2} - T_{4^2}$$

est l'écart entre deux termes consécutifs de la suite des T_{n^2}, celle de la note ; cet écart est toujours une somme de deux cubes consécutifs, un « nombre cubique centré » [16, A005898] (proposition 5). La ligne pourrait donc être un essai qui ramène la note aux cubes de la question de Lagrange.

3 La main et la date

Le rapprochement est dû à Georg Essl, en réponse à une question posée sur History of Science and Mathematics [7]. En 2012, G. L. Alexanderson a reproduit un manuscrit non signé, vendu par la librairie Bernard Quaritch dans les années 1990, daté par elle « vers 1797 » et attribué à Germain ; il l'a fait reproduire en couverture du *Bulletin of the AMS* d'avril 2012 [1]. La page commence par « La Grange m'ayant proposé de démontrer / Que le quarré d'un triangulaire quelconque est égal à la somme des cubes de tous les nombres

naturels pris depuis 1 jusqu'à n inclusivement ». Avec $T_n = 1+2+\cdots+n$, c'est l'identité de Nicomaque, $(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$ [16, A000537]. La preuve tient dans une différence : $\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2 = n^3$, c'est-à-dire $T_n^2 - T_{n-1}^2 = n^3$; en ajoutant ces égalités de 1 à n, les termes se compensent deux à deux et il reste $T_n^2 = 1^3+\cdots+n^3$. Sous un trait vient la somme des deux mêmes carrés : « J'ai aussi remarqué que » $\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2 = \frac{n^4+n^2}{2}$, « donc » $\Delta^a + \Delta^{a-1} = \square^a$ et

$$\square^{\Delta^a} + \square^{\Delta^{a-1}} = \Delta^{\square^a}$$

[1, p. 330] (figure 4). Germain note Δ^a le triangulaire de a, c'est-à-dire T_a, et $\square^a$ le carré de a ; l'exposant est un indice, non une puissance. La première ligne dit donc $T_a + T_{a-1} = a^2$, et la seconde $T_a^2 + T_{a-1}^2 = T_{a^2}$, qui est (1) avec a pour n. Lue à voix haute, cette seconde ligne est la phrase de NAF 4073 : le carré du triangulaire de a et celui du triangulaire de $a-1$ font le triangulaire du carré de a. Alexanderson ne parle pas de NAF 4073.

La page s'achève sur une dernière ligne, « d'où on tire »

$$\Delta^a + \Delta^{a-1} + \Delta^{\square^a} = \square^a + \square^{\Delta^a} + \square^{\Delta^{a-1}},$$

soit $T_a + T_{a-1} + T_{a^2} = a^2 + T_a^2 + T_{a-1}^2$: une somme de trois triangulaires égale à une somme de trois carrés. C'est la somme des deux lignes précédentes (proposition 6), et c'est elle qu'Alexanderson met en avant, en la rapprochant de l'énoncé de Fermat (1636) sur les sommes de nombres triangulaires, carrés et pentagonaux [1, p. 329]. Il ne relève pas sa forme, pourtant curieuse. Chaque terme d'un membre a son correspondant dans l'autre, Δ et $\square$ échangés, Δ^a avec $\square^a$, $\Delta^{\square^a}$ avec $\square^{\Delta^a}$, et Δ^{a-1} avec $\square^{\Delta^{a-1}}$. La ligne n'apprend rien que les deux précédentes ne disent, mais elle les réunit en une égalité où triangulaires et carrés se répondent ; c'est peut-être ce qui a fait écrire à Germain cette troisième ligne.

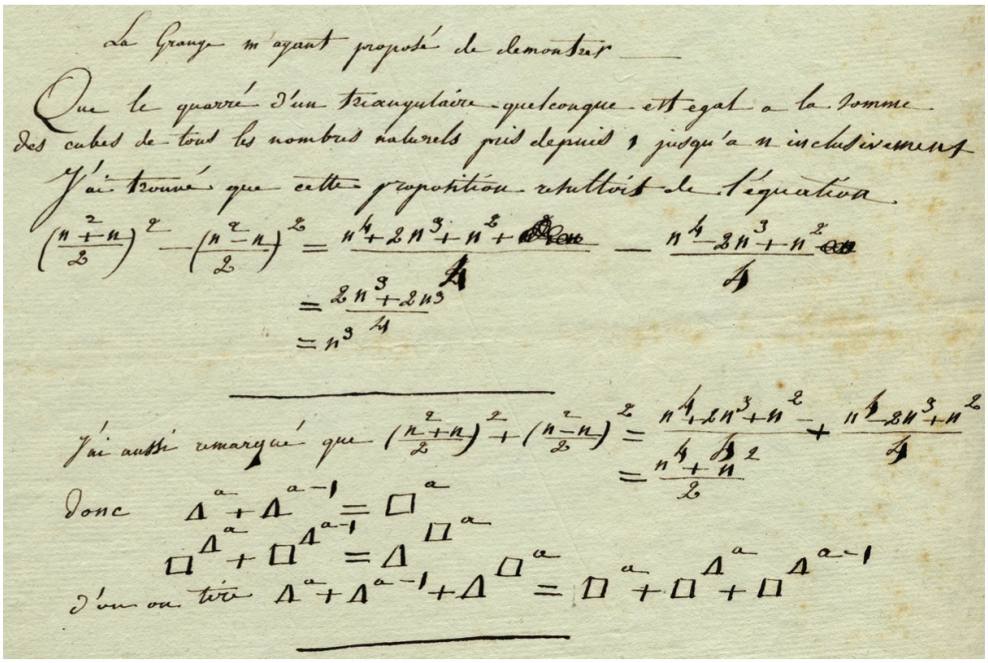

FIGURE 4 – Le manuscrit attribué à Germain, vendu par Bernard Quaritch et daté par lui « vers 1797 », tel que le reproduit Alexanderson [1, fig. 2, p. 330]. En haut, la question de Lagrange et la différence qui donne n^3 ; sous le trait, « J'ai aussi remarqué que », la somme, puis les mêmes égalités écrites avec Δ et $\square$.

L'argument qui pèse le plus est textuel. Les deux témoins écrivent la formule de la même façon : mêmes termes $(n^2 \pm n)/2$ entre parenthèses, l'exposant hors de la parenthèse, même

second membre $(n^4+n^2)/2$ là où $n^2(n^2+1)/2$ viendrait aussi naturellement ; et la phrase de NAF 4073 dit en mots ce que le manuscrit Quaritch dit en symboles. S'y ajoute le support, une lettre adressée à Germain, chez elle, restée dans ses papiers avant de passer par Libri. L'écriture, enfin, est compatible avec celle de la figure 2 d'Alexanderson et avec la lettre de Germain à Libri du 18 avril 1831 reliée dans le même volume (vues 27 à 29) : même inclinaison, même q de « quarré », même liaison dans « est ».

Le support date la note par en bas : elle est postérieure au 13 mars 1814, puisque le feuillet avait d'abord servi d'enveloppe. Le manuscrit Quaritch n'est daté que par le libraire. Si les deux témoins sont bien de Germain, la note de NAF 4073 montre qu'elle est revenue à cette identité au moins seize ans après la date qu'on donne à la première rédaction ; on ignore pourquoi.

L'identité est classique, et l'on savait par Alexanderson que Germain la connaissait. On ignorait qu'elle l'avait recopiée, après 1814, au dos d'une enveloppe restée dans ses lettres : les catalogues de NAF 4073 n'y voient que de la correspondance, et la ligne de théorie des nombres a échappé à ceux qui l'ont catalogué ou édité.

Questions ouvertes

Une expertise paléographique de la note, à partir du fac-similé de Gallica et de la figure 2 d'Alexanderson, confirmerait ou non l'attribution. Le fonds Germain de la Biblioteca Moreniana, à Florence, plus de deux cents feuillets [2], est l'endroit où chercher une troisième copie, ou la raison de celle-ci.

4 Le calcul de Germain prolongé

Le manuscrit Quaritch tient en deux gestes : développer $\left(\frac{n^2\pm n}{2}\right)^2$, puis comparer la différence et la somme des deux carrés. Cette section mène ces gestes plus loin que Germain ; rien de ce qui suit n'est sur les feuillets. Les propositions 2 à 6 sont des identités élémentaires, sans doute connues. Les systèmes des propositions 7 et 9, leur forme matricielle et la divisibilité par T_n^2 sont dus à Tits et à Edwards [18, 6], et les polynômes eux-mêmes étaient connus de Faulhaber [12]. L'apport de cette section est de les relier au calcul de Germain, avec des preuves complètes. Partout $n \geq 1$ et $T_0 = 0$.

Proposition 2. *$T_{n^2} = 2\,T_n^2 - n^3$: le triangulaire d'un carré vaut deux fois la somme des n premiers cubes, moins le dernier.*

Démonstration. La différence de Germain donne $T_{n-1}^2 = T_n^2 - n^3$; on le porte dans (1). Pour $n = 3$: $T_9 = 2 \cdot 36 - 27 = 45$. □

Proposition 3. *Pour tous $m, n \geq 1$, $T_{mn} = T_m\,T_n + T_{m-1}\,T_{n-1}$.*

Démonstration. $4\,(T_mT_n+T_{m-1}T_{n-1}) = mn\big[(m+1)(n+1)+(m-1)(n-1)\big] = mn\,(2mn+2) = 4\,T_{mn}$. Les termes croisés $\pm(m+n)$ se détruisent, comme les $\pm 2n^3$ chez Germain. □

Pour $m = n$, c'est (1) ; pour $m = 2$, c'est $T_{2n} = 3T_n + T_{n-1}$, que Nelsen illustre sans mots [15, p. 104]. La proposition donne aussi le triangulaire de toute puissance de n.

Proposition 4. *Pour $k \geq 2$ et $0 < j < k$,*

$$T_{n^k} = T_{n^j}\,T_{n^{k-j}} + T_{n^j-1}\,T_{n^{k-j}-1}.$$

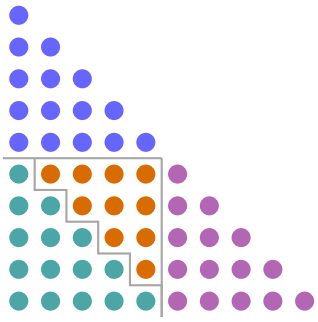

FIGURE 5 – $T_{2n} = 3T_n + T_{n-1}$ pour $n = 5$, d'après Nelsen [15, p. 104] : l'escalier de $T_{10} = 55$ points se découpe en trois escaliers de $T_5 = 15$ points (en bleu, en vert et en violet) et un de $T_4 = 10$ points (en orange) ; le carré 5×5 du bas à gauche vaut $T_5 + T_4$.

Si $k = 2j$ est pair, $T_{n^{2j}} = T_{n^j}^2 + T_{n^j-1}^2$: le triangulaire d'une puissance paire est la somme des carrés de deux triangulaires consécutifs. Enfin

$$T_{n^k} - T_{(n-1)^k} = \frac{(n^k - (n-1)^k)(n^k + (n-1)^k + 1)}{2}.$$

Démonstration. La première égalité est la proposition 3 avec $m = n^j$ et n^{k-j} ; la deuxième en est le cas $j = k-j$, ou (1) appliquée à n^j. La troisième vient de $T_a - T_b = (a-b)(a+b+1)/2$, avec $a = n^k$ et $b = (n-1)^k$. □

Ainsi $T_{n^3} = T_n T_{n^2} + T_{n-1} T_{n^2-1}$ et $T_{n^4} = T_{n^2}^2 + T_{n^2-1}^2$. Pour $k = 2$, la dernière formule redonne $(2n-1)(n^2-n+1) = n^3 + (n-1)^3$, le pas de la proposition 5. Pour un exposant impair, en revanche, T_{n^k} n'est pas en général une somme de deux carrés de triangulaires : pour T_{n^3} et $2 \le n \le 6$, on n'en trouve que lorsque n^3 est lui-même un carré ($T_{64} = T_7^2 + T_8^2$). La note dépend vraiment du carré.

Proposition 5. *Pour $0 \le a < b$,*

$$T_{b^2} - T_{a^2} = a^3 + 2(a+1)^3 + \cdots + 2(b-1)^3 + b^3 = \frac{(b^2 - a^2)(a^2 + b^2 + 1)}{2}.$$

En particulier $T_{(a+1)^2} - T_{a^2} = a^3 + (a+1)^3 = (2a+1)(a^2+a+1)$.

Démonstration. Par (1) écrite en k et en $k-1$, $T_{k^2} - T_{(k-1)^2} = T_k^2 - T_{k-2}^2$, et deux différences de Germain donnent $k^3 + (k-1)^3$. On ajoute ces égalités de $k = a+1$ à b : les T_{k^2} intermédiaires se détruisent, et chaque cube intérieur apparaît deux fois, une fois comme k^3, une fois comme $(k-1)^3$. La seconde forme vient de ce que $T_{b^2} - T_{a^2}$ est la somme des entiers de a^2+1 à b^2, au nombre de $b^2 - a^2$ et de moyenne $(a^2 + b^2 + 1)/2$. □

Pour $a = 4$: $64 + 125 = 17 + 18 + \cdots + 25 = 189$, le nombre du feuillet.

Proposition 6. *Pour tout $k \ge 1$,*

$$T_n^k \pm T_{n-1}^k = \left(\frac{n}{2}\right)^k [(n+1)^k \pm (n-1)^k].$$

Démonstration. Les deux triangulaires ont le facteur commun $n/2$: $T_n = \frac{n}{2}(n+1)$ et $T_{n-1} = \frac{n}{2}(n-1)$. En élevant à la puissance k,

$$T_n^k = \left(\frac{n}{2}\right)^k (n+1)^k, \qquad T_{n-1}^k = \left(\frac{n}{2}\right)^k (n-1)^k,$$

et l'on ajoute ou l'on retranche en mettant $(n/2)^k$ en facteur. Par la formule du binôme, $(n\pm1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n^{k-j}(\pm1)^j$: dans la somme $(n+1)^k + (n-1)^k$ les termes d'indice j impair se détruisent et ceux d'indice pair doublent, dans la différence c'est l'inverse,

$$(n+1)^k + (n-1)^k = 2\sum_{j\text{ pair}} \binom{k}{j} n^{k-j}, \qquad (n+1)^k - (n-1)^k = 2\sum_{j\text{ impair}} \binom{k}{j} n^{k-j}. \quad \square$$

Les deux lignes du manuscrit Quaritch sont les premiers cas de la somme : $k=1$ donne $T_n + T_{n-1} = n^2$, c'est-à-dire $\Delta^a + \Delta^{a-1} = \square^a$, et $k=2$ donne $T_n^2 + T_{n-1}^2 = \frac{n^2}{4}(2n^2+2) = T_{n^2}$, la note. En les ajoutant, on obtient la dernière ligne du manuscrit, $T_n + T_{n-1} + T_{n^2} = n^2 + T_n^2 + T_{n-1}^2$: trois triangulaires font trois carrés. Pour la différence, $k=2$ redonne n^3, la différence de Germain ; et pour $k=4$, les deux lignes du manuscrit se multiplient, $T_n^4 - T_{n-1}^4 = (T_n^2 - T_{n-1}^2)(T_n^2 + T_{n-1}^2) = n^3\, T_{n^2}$. Les différences $T_n^k - T_{n-1}^k$ sont répertoriées pour $k=4$ et $k=5$ [16, A168364, A393642], mais pas pour $k=3$: $n^3(3n^2+1)/4 = 1, 26, 189, 736, \ldots$, où l'on retrouve, pour $n=3$, le 189 du feuillet.

Germain ajoute ensuite ses différences de 1 à n pour obtenir la formule de Lagrange. Le même geste, à l'exposant k, donne toutes les sommes de puissances impaires. Notons $S_p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$.

Proposition 7. *Pour tout $k \geq 1$,*

$$2^{k-1}\, T_n^k = \sum_{\substack{j\leq k \\ j\ \textit{impair}}} \binom{k}{j} S_{2k-j}.$$

Démonstration. Dans la proposition 6, le crochet de la différence vaut $(m+1)^k - (m-1)^k = 2\sum_{j\text{ impair}} \binom{k}{j} m^{k-j}$, donc $2^{k-1}(T_m^k - T_{m-1}^k) = \sum_{j\text{ impair}} \binom{k}{j} m^{2k-j}$. On ajoute ces égalités de $m=1$ à n : à gauche les termes se détruisent deux à deux et il reste $2^{k-1}T_n^k$; à droite viennent les sommes S_{2k-j}. $\square$

Comme j est impair, $2k-j$ l'est aussi : seules les sommes de puissances impaires apparaissent. Les premières lignes :

k	
1	$T_n = S_1$
2	$2\,T_n^2 = 2\,S_3$
3	$4\,T_n^3 = 3\,S_5 + S_3$
4	$8\,T_n^4 = 4\,S_7 + 4\,S_5$
5	$16\,T_n^5 = 5\,S_9 + 10\,S_7 + S_5$

La ligne $k=2$ est la formule de Lagrange. Le système est triangulaire : la ligne k introduit une seule somme nouvelle, S_{2k-1}, avec le coefficient $k \neq 0$. On le résout de proche en proche :

$$S_3 = T_n^2, \qquad S_5 = \frac{T_n^2(4T_n - 1)}{3},$$
$$S_7 = \frac{T_n^2(6T_n^2 - 4T_n + 1)}{3}, \qquad S_9 = \frac{T_n^2(16T_n^3 - 20T_n^2 + 12T_n - 3)}{5}.$$

Toute somme de puissances impaires est ainsi un polynôme en T_n, divisible par T_n^2 dès $p=3$: c'est le théorème de Faulhaber (1631), dont Knuth a reconstitué la méthode [12]. Le système lui-même vient de Tits ; Edwards l'écrit sous forme matricielle, la matrice reprenant un coefficient sur deux des lignes du triangle de Pascal, et en tire la divisibilité par T_n^2 [18, 6]. Les lignes $k=3$ et $k=4$ se lisent aussi $S_3 + 3S_5 = 4S_1^3$ et $S_5 + S_7 = 2S_3^2$.

Parmi tous ces polynômes, la formule de Lagrange est la seule où la somme soit une puissance pure de T_n, en dehors du cas trivial $S_1 = T_n$.

Proposition 8. *Si $S_p = T_n^q$ pour tout n, avec $p, q \geq 1$, alors $(p,q) = (1,1)$ ou $(p,q) = (3,2)$.*

Démonstration. Il suffit de $n = 2$: $S_p = 1 + 2^p$ et $T_2^q = 3^q$, donc $2^p + 1 = 3^q$. Si $p = 1$, alors $q = 1$. Si $p \geq 2$, alors $3^q \equiv 1 \pmod 4$, donc $q = 2r$ est pair, et $2^p = (3^r - 1)(3^r + 1)$. Les deux facteurs sont des puissances de 2 qui diffèrent de 2 : ce sont 2 et 4, d'où $r = 1$, $q = 2$ et $p = 3$. C'est un cas particulier du théorème de Mihăilescu, l'ancienne conjecture de Catalan [14], déjà connu de Levi ben Gershon au XIVe siècle. □

Une autre preuve compare les coefficients dominants : S_p est un polynôme en n de degré $p+1$ et de coefficient dominant $1/(p+1)$, T_n^q un polynôme de degré $2q$ et de coefficient dominant $1/2^q$, et $p + 1 = 2q = 2^q$ ne laisse que $q = 1$ ou 2.

Les sommes de puissances paires échappent à ce système, mais le même geste les atteint si l'on télescope $(2n+1)\,T_n^k$ au lieu de T_n^k.

Proposition 9. *Pour tout $k \geq 1$,*

$$2^{k-1}(2n+1)\,T_n^k = \sum_{\substack{j \leq k \\ j \text{ pair}}} \binom{k}{j} S_{2k-j} + 2 \sum_{\substack{j \leq k \\ j \text{ impair}}} \binom{k}{j} S_{2k-j+1}.$$

Démonstration. Avec $T_m = \frac{m}{2}(m+1)$ et $T_{m-1} = \frac{m}{2}(m-1)$,

$$(2m+1)\,T_m^k - (2m-1)\,T_{m-1}^k = \Big(\frac{m}{2}\Big)^k \Big(2m\big[(m+1)^k - (m-1)^k\big] + \big[(m+1)^k + (m-1)^k\big]\Big).$$

Par les deux formules du binôme établies dans la preuve de la proposition 6, le premier crochet est une somme sur les j impairs et le second une somme sur les j pairs, d'où

$$2^{k-1}\big((2m+1)T_m^k - (2m-1)T_{m-1}^k\big) = \sum_{j \text{ pair}} \binom{k}{j} m^{2k-j} + 2 \sum_{j \text{ impair}} \binom{k}{j} m^{2k-j+1},$$

où tous les exposants sont pairs. On ajoute de $m = 1$ à n : à gauche les termes se détruisent et il reste $2^{k-1}(2n+1)T_n^k$, puisque $(2 \cdot 0 + 1)\,T_0 = 0$. □

La ligne k introduit S_{2k} avec le coefficient $1 + 2k \neq 0$: le système est encore triangulaire. Ses premières lignes, en notant $T = T_n$:

k	
1	$(2n+1)\,T = 3S_2$
2	$2(2n+1)\,T^2 = 5S_4 + S_2$
3	$4(2n+1)\,T^3 = 7S_6 + 5S_4$
4	$8(2n+1)\,T^4 = 9S_8 + 14S_6 + S_4$

On les résout de proche en proche, chaque ligne donnant la nouvelle somme à partir des précédentes :

$$S_2 = \frac{(2n+1)\,T}{3}, \qquad S_4 = \frac{(2n+1)\,T\,(6T-1)}{15},$$
$$S_6 = \frac{(2n+1)\,T\,(12T^2 - 6T + 1)}{21}, \qquad S_8 = \frac{(2n+1)\,T\,(40T^3 - 40T^2 + 18T - 3)}{45}.$$

Toute somme de puissances paires est ainsi le produit de $2n+1$ par un polynôme en T_n, ce que Faulhaber savait déjà et que Jacobi a démontré en 1834 par une autre voie [12]. Le système pair et sa matrice sont aussi chez Tits et Edwards [18, 6]. Ce produit n'est pas un polynôme en T_n, puisque $2n + 1 = \sqrt{8T_n + 1}$. Le facteur $2n+1$ disparaît pourtant si l'on exprime tout avec S_1 et S_2.

Proposition 10. *Pour tout $k \geq 1$, il existe un polynôme R_k à coefficients rationnels tel que $S_{2k} = S_2\, R_k(S_1)$; par exemple $R_1 = 1$, $R_2(x) = (6x-1)/5$, $R_3(x) = (12x^2 - 6x + 1)/7$.*

Démonstration. Écrivons $S_{2i} = (2n+1)\, P_i(T_n)$, ce que permet la proposition 9 : sa ligne k donne $(2k+1)\, P_k = 2^{k-1} T^k - \sum_{i<k} b_{k,i} P_i$, où les $b_{k,i}$ sont ses coefficients. Par récurrence sur k, chaque P_k est sans terme constant, puisque T^k et les P_i précédents le sont ; donc $P_k(T) = T\, Q_k(T)$ pour un polynôme Q_k. Alors $S_{2k} = (2n+1)\, T_n\, Q_k(T_n) = 3S_2\, Q_k(S_1)$, puisque $3S_2 = (2n+1)T_n$ et $S_1 = T_n$. On pose $R_k = 3Q_k$. □

Les coefficients de ces polynômes s'expriment aussi par les nombres de Bernoulli. C'est la voie usuelle depuis Jacques Bernoulli (*Ars conjectandi*, 1713), qui donne d'un coup toutes les sommes S_p [12, 6]. Elle est plus astucieuse et plus rapide : une fois les nombres de Bernoulli calculés, chaque S_p s'écrit directement, alors que les systèmes des propositions 7 et 9 se résolvent une puissance à la fois. Ceux-ci ont pour eux de n'utiliser que des coefficients binomiaux, et de prolonger le calcul de Germain.

Conclusion

Le maître de Gauss pensait occuper sa classe avec S_1 jusqu'à 100, et l'écolier lui a rendu 5050 sur-le-champ. La leçon est restée : pour un enfant qui n'est pas sage, mieux vaut demander S_p avec $p > 1$. Il lui faudra refaire le calcul de Germain, puis résoudre l'un des deux systèmes triangulaires, ce qui laisse le temps de réfléchir à sa conduite.

Ces sommes ne sont pas étrangères aux autres recherches de Germain. Dans la même liasse de brouillons pour Gauss (Français 9118), elle range les nombres de Fermat $2^{2^i} + 1$ parmi les $p^4 + q^4$ [8, vue 93] et annonce une preuve du dernier théorème de Fermat pour l'exposant $n = p - 1$, p premier de la forme $8k + 7$ [8, vue 44], preuve que Del Centina édite et analyse [3, annexe 1] : les sommes de puissances, arrivées par une question de Lagrange, y côtoient ses recherches sur l'équation de Fermat [13].

Sources et vérification

Tous les énoncés de l'article sont démontrés en Lean 4 avec mathlib, dans le dépôt `https://github.com/Commutator-IO/GermainArchivesProofs` :

— la note et la proposition 2 : `NumberTheory/Naf4073Note.lean` ;
— les propositions 3 à 6 : `NumberTheory/Naf4073Triangular.lean` ;
— les propositions 7, 9 et 10 : `Algebra/BigOperators/Naf4073PowerSums.lean` ;
— la proposition 8 : `NumberTheory/Naf4073Gersonides.lean`.

La formule du feuillet y est établie dans tout corps où $2 \neq 0$, et la proposition 1 sous la forme $T_n^2 + T_{n+1}^2 = T_{(n+1)^2}$ pour tout n, qui évite la soustraction tronquée des entiers naturels ; la proposition 7 y est indexée par $m = k - j$.

La transcription, les recherches bibliographiques, la rédaction de l'article et les preuves Lean ont été réalisées avec l'aide d'un modèle de langue (Claude, d'Anthropic), sous la direction de l'auteur. Les lectures des manuscrits citées ici ont été relues par l'auteur sur les images de Gallica.

Remerciements

L'auteur remercie G. Essl, qui a reconnu dans le manuscrit publié par Alexanderson l'identité du feuillet de NAF 4073 et la lui a signalée, ainsi que C. & C. Vuong pour leur relecture.

A Les sommes S_1 à S_{10}

Pour $1 \leq p \leq 10$, la somme $S_p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ en fonction de n, puis de $T = T_n$: un polynôme en T pour p impair (proposition 7), le produit de $2n + 1$ par un polynôme en T pour p pair (proposition 9). Ce sont, pour $p = 1$ à 10, les suites A000217, A000330, A000537 à A000542, A007487 et A023002 de l'OEIS [16]. Les formules ont été obtenues par la résolution des deux systèmes et vérifiées pour $0 \leq n < 60$.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \tfrac{1}{2}\big(n^2 + n\big) \\
&= T \\
S_2 &= \tfrac{1}{6}\big(2n^3 + 3n^2 + n\big) \\
&= \tfrac{2n+1}{3}\, T \\
S_3 &= \tfrac{1}{4}\big(n^4 + 2n^3 + n^2\big) \\
&= T^2 \\
S_4 &= \tfrac{1}{30}\big(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n\big) \\
&= \tfrac{2n+1}{15}\,(6T^2 - T) \\
S_5 &= \tfrac{1}{12}\big(2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2\big) \\
&= \tfrac{1}{3}\,(4T^3 - T^2) \\
S_6 &= \tfrac{1}{42}\big(6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n\big) \\
&= \tfrac{2n+1}{21}\,(12T^3 - 6T^2 + T) \\
S_7 &= \tfrac{1}{24}\big(3n^8 + 12n^7 + 14n^6 - 7n^4 + 2n^2\big) \\
&= \tfrac{1}{3}\,(6T^4 - 4T^3 + T^2) \\
S_8 &= \tfrac{1}{90}\big(10n^9 + 45n^8 + 60n^7 - 42n^5 + 20n^3 - 3n\big) \\
&= \tfrac{2n+1}{45}\,(40T^4 - 40T^3 + 18T^2 - 3T) \\
S_9 &= \tfrac{1}{20}\big(2n^{10} + 10n^9 + 15n^8 - 14n^6 + 10n^4 - 3n^2\big) \\
&= \tfrac{1}{5}\,(16T^5 - 20T^4 + 12T^3 - 3T^2) \\
S_{10} &= \tfrac{1}{66}\big(6n^{11} + 33n^{10} + 55n^9 - 66n^7 + 66n^5 - 33n^3 + 5n\big) \\
&= \tfrac{2n+1}{33}\,(48T^5 - 80T^4 + 68T^3 - 30T^2 + 5T)
\end{aligned}
$$

Références

[1] G. L. Alexanderson, « About the cover : Sophie Germain and a problem in number theory », *Bulletin of the American Mathematical Society* 49, n° 2 (avril 2012), p. 327–331. doi:10.1090/S0273-0979-2012-01370-8.

[2] A. Del Centina, « Letters of Sophie Germain preserved in Florence », *Historia Mathematica* 32 (2005), p. 60–75. doi:10.1016/j.hm.2003.11.001.

[3] A. Del Centina, « Unpublished manuscripts of Sophie Germain and a revaluation of her work on Fermat's Last Theorem », *Archive for History of Exact Sciences* 62 (2008), p. 349–392. doi:10.1007/s00407-007-0016-4.

[4] A. Del Centina et A. Fiocca, « On the correspondence of Sophie Germain », dans M. T. Borgato, E. Neuenschwander et I. Passeron (dir.), *Mathematical Correspondences and Critical Editions*, Cham, Springer, coll. « Trends in the History of Science », 2018, p. 147–166. doi:10.1007/978-3-319-73577-1_9.

[5] L. Delisle, *Catalogue des manuscrits des fonds Libri et Barrois*, Paris, H. Champion, 1888.

[6] A. W. F. Edwards, « A quick route to sums of powers », *The American Mathematical Monthly* 93 (1986), p. 451–455. doi:10.1080/00029890.1986.11971850.

[7] G. Essl, réponse à « Who wrote this note on triangular numbers in Sophie Germain's correspondence (BnF NAF 4073) ? », History of Science and Mathematics, 25 octobre 2026, `https://hsm.stackexchange.com/a/19744`.

[8] Bibliothèque nationale de France, Français 9118 (papiers de Sophie Germain), `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b9007572p`.

[9] Bibliothèque nationale de France, Nouvelles acquisitions françaises 4073, `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b10089787b`.

[10] B. Hayes, « Gauss's day of reckoning », *American Scientist* 94, n° 3 (2006), p. 200. doi:10.1511/2006.59.200.

[11] C. Henry, « Les manuscrits de Sophie Germain et leur récent éditeur. Documents nouveaux », *Revue philosophique de la France et de l'étranger* 8 (1879), p. 619–641.

[12] D. E. Knuth, « Johann Faulhaber and sums of powers », *Mathematics of Computation* 61, n° 203 (1993), p. 277–294. doi:10.1090/S0025-5718-1993-1197512-7.

[13] R. Laubenbacher et D. Pengelley, « "Voici ce que j'ai trouvé :" Sophie Germain's grand plan to prove Fermat's Last Theorem », *Historia Mathematica* 37 (2010), p. 641–692. doi:10.1016/j.hm.2009.12.002.

[14] P. Mihăilescu, « Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 572 (2004), p. 167–195. doi:10.1515/crll.2004.048.

[15] R. B. Nelsen, *Proofs Without Words : Exercises in Visual Thinking*, Washington, Mathematical Association of America, coll. « Classroom Resource Materials », 1993. doi:10.1090/clrm/001.

[16] OEIS Foundation, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `https://oeis.org`, consultée le 25 novembre 2026. Les suites sont citées par leur numéro, par exemple `https://oeis.org/A000217`.

[17] H. Omont, *Catalogue général des manuscrits français. Nouvelles acquisitions françaises*, t. II, *n°s 3061–6500*, Paris, E. Leroux, 1900.

[18] L. Tits, « Sur la sommation des puissances numériques », *Mathesis* 37 (1923), p. 353–355.